

受験サプリ 筑波大学 社会国際学群/人間学群(心理学類/障害科学類)/生命環境学群/理工学群/情報学群/医学群
2013年度 数学 前期日程

受験者は、志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ、解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。

※ ○印のついた問題は必ず解答し、△印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。

学 類		解答すべき問題						備 考
		数学Ⅱ	数学Ⅲ		数学B	数学C		
		I	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	V	Ⅵ	
社 会 学 類		○			○			○印の問題2問を解答すること。
国 際 総 合 学 類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△		□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教 育 学 類 障 害 科 学 類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○			○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ」選択者		○	○				○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者					○	○	○印の問題2問を解答すること。
心 理 学 類		○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生 物 学 類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生 物 資 源 学 類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地 球 学 類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数 学 類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物 理 学 類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化 学 類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応 用 理 工 学 類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工 学 シ ス テ ム 学 類		△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社 会 工 学 類		△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情 報 科 学 類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類		△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類		△	△	△	□	□	□	△印の中から1問，□印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医 学 類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医 療 科 学 類		○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

I $f(x), g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく。

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\frac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

II

n は自然数とする。

(1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n} \pi + \cos \frac{k-1}{2n} \pi \right)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 媒介変数 t によって

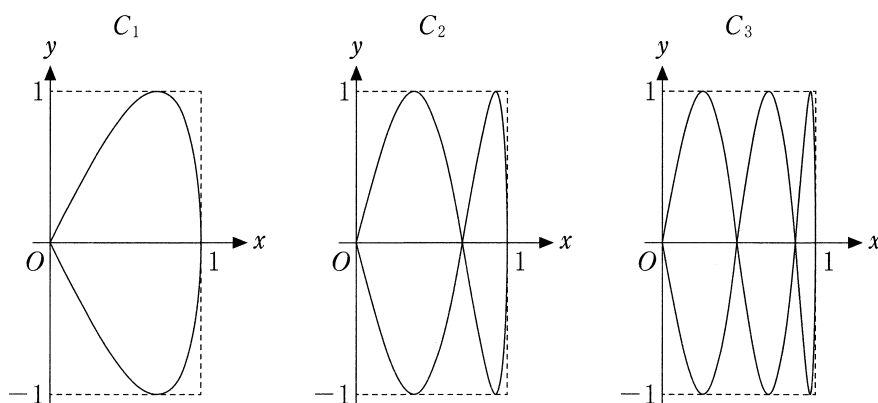
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n} \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

を用いてよい。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。



III

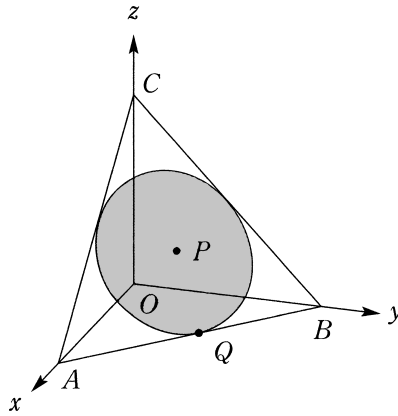
xyz 空間において, 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり, 正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P , 円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2) 円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3) 円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき, その線分の長さを t を用いて表せ。

(4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



Ⅳ 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

および $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$ を満たすとする。ただし, a , b , c は定数とする。

(1) $p_n = a_n + b_n + c_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする。 $a+b+c$ が奇数であれば, すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

Ⅴ 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし, a , b , c , d は実数とする。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2013}$ を求めよ。

Ⅵ 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の, 直線 $y=mx$ と平行な2接線を ℓ_1 , ℓ'_1 とし, ℓ_1 , ℓ'_1 に直交する C の2接線を ℓ_2 , ℓ'_2 とする。

(1) ℓ_1 , ℓ'_1 の方定式を m を用いて表せ。

(2) ℓ_1 と ℓ'_1 の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ'_2 の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。
ただし, 平行な2直線 ℓ , ℓ' の距離とは, ℓ 上の1点と直線 ℓ' の距離である。

(3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

- (4) $\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。
さらに m が変化するとき, S の最大値を求めよ。