京都大学　総合人間学部(総合人間学科＜理系＞)/教育学部(教育科学科＜理系＞)/理学部/医学部 薬学部/工学部/農学部　2012年度　物理　前期試験

解答　Ⅰ　ア　$\dfrac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}v_0$　イ　$\dfrac{m_3-em_1}{m_1+m_3}v_0$　ウ　$-\dfrac{\mu(m_1+m_2)+\mu_2m_2}{m_1}g$　エ　μ_2g　オ　$-\mu_1g$

カ　$\dfrac{v}{a_2-a_1}$　キ　$\dfrac{a_2}{a_2-a_1}v$　ク　$\dfrac{a'-a_2}{(a_2-a_1)a'}v$　ケ　$\dfrac{m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$　コ　$\dfrac{m_1v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$

サ　$l_1-l_2\geqq\dfrac{m_1v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$　シ　$\dfrac{m_1v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\dfrac{\mu_2m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}$　ス　$\dfrac{1}{2}m_1v^2$

セ　$\mu_1(m_1+m_2)gx_B$　ソ　$\mu_2m_2g(x_1-x_2)$　**問1・問2**　解説参考　Ⅱ　イ　$\dfrac{1}{2}\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2$　ロ　ε_rV_0

ハ　$\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0$　ニ　$\dfrac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$　ホ　$\dfrac{\varepsilon_r^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0^2$　ヘ　$\dfrac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}V_0$　ト　$\{\varepsilon_r-(\varepsilon_r-1)x\}C_0$　チ　$\dfrac{V}{R}\Delta t$

リ　$(\varepsilon_r-1)C_0\Delta x$　**問1～問4**　解説参考　Ⅲ　あ　v_A-v_B　い　at　う　$\dfrac{h}{c}$　え　$\dfrac{ah}{c^2}$　お　慣性

か　$-a$　き　地球の中心向き　く　$\dfrac{GM}{r^2}$　け　$\dfrac{\beta h}{c^2}$　こ　βh　さ　$\dfrac{\phi_B-\phi_A}{c^2}$　し　$-G\dfrac{Mm}{r}$　す　$-gR$

せ　$\dfrac{gRL}{c^2(R+L)}$　そ　$-\dfrac{gR^2}{2c^2(R+L)}$　**問1～問3**　解説参考

解説　Ⅰ　(1)　**ア・イ**　物体2は衝突直後は床に対して動いていないので，事実上物体1と物体3の衝突と考えてよい。衝突直後の物体3の速度を v_3 とすると，運動量保存則より

$$m_1v+m_3v_3=m_3v_0 \quad \cdots①$$

はね返り係数の式より

$$e=\frac{v-v_3}{v_0}$$

ゆえに　$v_3=v-ev_0$　…②

②を①に代入して

$$m_1v+m_3(v-ev_0)=m_3v_0$$
$$(m_1+m_3)v=(1+e)m_3v_0$$

よって　$v=\dfrac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}v_0$

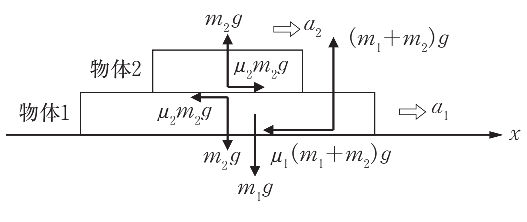
これを②に代入して

$$v_3=\left\{\frac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}-e\right\}v_0=\frac{m_3-em_1}{m_1+m_3}v_0$$

ウ・エ　物体1と物体3が衝突してからの時刻を t とする。

$0<t<T_A$ のとき

物体1が床から受ける垂直抗力は $(m_1+m_2)g$ で，物体1は，運動する向き(右向き)と反対の向き(左向き)に動摩擦力 $\mu_1(m_1+m_2)g$ を受ける。物体2が物体1から受ける垂直抗力は m_2g で，物体2は，物体1に対して運動する向き(左向き)と反対の向き(右向き)に動摩擦力 μ_2m_2g を受ける。この反作用として，物体1は左向きの動摩擦力 μ_2m_2g を受ける。



したがって，このときの運動方程式は

物体1：$m_1a_1=-\mu_1(m_1+m_2)g-\mu_2m_2g$

物体2：$m_2a_2=\mu_2m_2g$

よって　$a_1=-\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2m_2}{m_1}g$

$a_2=\mu_2g$

オ　$T_A<t<T_B$ のとき

物体1と物体2の相対速度が0であり同じ加速度a'で運動するので，両者を一体とみると，床から左向きに動摩擦力 $\mu_1(m_1+m_2)g$ を受ける。したがって，このときの運動方程式は

$$(m_1+m_2)a'=-\mu_1(m_1+m_2)g$$

よって　$a'=-\mu_1g$

問1　$0<t<T_A$ のとき，物体1の加速度 a_1 は負，物体2の加速度 a_2 は正で，$t=T_A$ において両者は同じ速度 v' になる。$T_A<t<T_B$ では，両者の加速度は同じ負の加速度 a' であるから，物体2は物体1から左向きの静止摩擦力 f を受ける。この反作用として，物体1は右向きの静止摩擦力 f を受ける。

したがって，運動方程式は

物体1：$m_1a'=-\mu_1(m_1+m_2)g+f$

物体2：$m_2a'=-f$

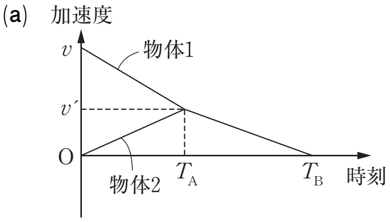
$a'=-\mu_1g$ より，$f=\mu_1m_2g$

これより　$a'=-\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)-\mu_1m_2}{m_1}g$

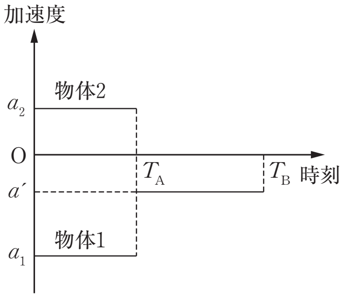
となり，$|a_1|>|a'|$　である。

以上から，グラフは下のようになる。

(a)　加速度



(b)



カ・キ　$0<t<T_A$ では，物体 1，物体 2 は等加速度運動をするから

$v'=v+a_1T_A$

$v'=a_2T_A$

ゆえに　$v+a_1T_A=a_2T_A$

よって　$T_A=\dfrac{v}{a_2-a_1}$　　$v'=\dfrac{a_2}{a_2-a_1}v$

ク　$T_A<t<T_B$ において，$a'(T_B-T_A)+v'=0$ より

$$T_B=T_A-\frac{v'}{a'}$$

$$=\frac{v}{a_2-a_1}-\frac{a_2v}{a'(a_2-a_1)}=\frac{a'-a_2}{(a_2-a_1)a'}v$$

ケ　**ウ・エ**の結果より

$$T_A=\frac{v}{a_2-a_1}=\frac{v}{\mu_2g+\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2m_2}{m_1}g}$$

$$=\frac{m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$$

コ　$T_B=\dfrac{a'-a_2}{(a_2-a_1)a'}v=\dfrac{a'-a_2}{a'}T_A$

エ・オの結果より　$a'-a_2=-(\mu_1+\mu_2)g$

よって　$T_B=\dfrac{-(\mu_1+\mu_2)g}{-\mu_1g}\cdot\dfrac{m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

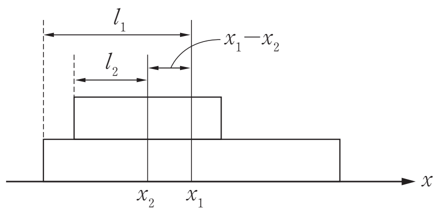
$$=\frac{m_1v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$$

サ　時刻 T_A における物体 1 と物体 2 の中心の位置をそれぞれ x_1，x_2 とする。$t\geqq T_A$ では 2 物体が一体となって運動するので，最終的な中心のずれは x_1-x_2 となる。

これが，物体 2 が物体 1 の上面からはみ出さない条件

$x_1-x_2\leqq l_1-l_2$

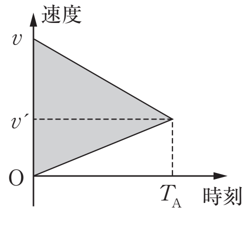
を与える。



ここで，x_1-x_2 は右の図の $v-t$ グラフの影の部分の面積で表されるから

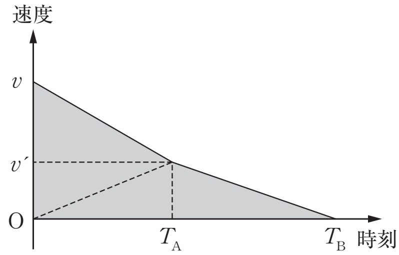
$x_1-x_2=\dfrac{1}{2}vT_A$

よって，条件は



$$l_1-l_2\geqq\frac{m_1v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)}$$

シ　$t=T_B$ での物体 1 の中心の位置 x_B は右図の影の部分の面積で表されるから



$$x_B=\frac{1}{2}vT_A+\frac{1}{2}v'T_B$$

ウ・エ・キの結果より

$$v'=\frac{a_2}{a_2-a_1}v=\frac{\mu_2m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)}$$

よって　$x_B=\dfrac{1}{2}v\cdot\dfrac{m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_2m_1v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)}\cdot\frac{m_1v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$$

$$=\frac{m_1v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\frac{\mu_2m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}$$

(2)　**ス**　物体 3 が物体 1 に衝突した直後，物体 1 の速度は v，物体 2 の速度は 0 という条件であるから，運動エネルギーの総和は物体1の運動エネルギーに等しく

$$\frac{1}{2}m_1v^2$$

セ　時刻 0 から T_B の間，物体 1 には常に床との間に動摩擦力 $-\mu_1(m_1+m_2)g$ が作用しているので，摩擦で失われるエネルギー E_1 は

$E_1=\mu_1(m_1+m_2)gx_B$

となる。

ソ　物体 1 に対して物体 2 が運動した距離は x_1-x_2 で，この間の動摩擦力は μ_2m_2g であるから，摩擦で失われるエネルギー E_2 は

$E_2=\mu_2m_2g(x_1-x_2)$

となる。

(参考)　問題文にあるように，x_B は，運動エネルギーの変化が摩擦力のした仕事に等しいことから求めることができる。

$$\frac{1}{2}m_1v^2=\mu_1(m_1+m_2)gx_B+\mu_2m_2g(x_1-x_2)$$

これに，$x_1-x_2=\dfrac{m_1v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)}$ を代入し整理すると，**シ**で求めた x_B と一致する。

問 2　物体 1 と物体 2 の間の動摩擦力 μ_2m_2g は作用反作用の力であり，2 物体が互いに及ぼす力積は打ち消し合って，全体の運動量は変化しない。物体 1 と床の間の動摩擦力は 2 物体に対する外力であり，この力積を受けることにより全体の運動量は変化する。すなわち，全体の運動量の変化は，物体が受けた外力(摩擦力)の力積に等しいから

$0-m_1v=-\mu_1(m_1+m_2)gT_B$

これより，**コ**で求めた T_B と同じ式

$$T_B=\frac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$$

が得られる。

よって，T_B は μ_1 に依存するものの μ_2 には依存しないことがわかる。

Ⅱ　イ　操作(i)でコンデンサーAに蓄えられた電荷を Q_1 とすると，Aの容量が $\varepsilon_r C_0$ であるから

$$Q_1=\varepsilon_r C_0 V_0$$

このとき，Aに蓄えられている静電エネルギーを U_0 とすると

$$U_0=\frac{Q_1^2}{2\varepsilon_r C_0}=\frac{1}{2}\varepsilon_r C_0 V_0^2$$

操作(ii)でAの誘電体を抜き取ると，電荷は Q_1 に保たれるが，容量は C_0 になる。このとき，Aに蓄えられている静電エネルギーを U_0' とすると

$$U_0'=\frac{Q_1^2}{2C_0}=\frac{1}{2}\varepsilon_r^2 C_0 V_0^2$$

操作(ii)で誘電体を抜き取るのに要するエネルギーを E とすると，エネルギー保存則より

$$U_0+E=U_0'$$

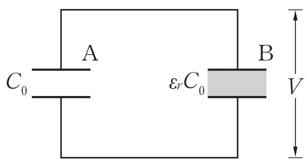
よって　$E=U_0'-U=\frac{1}{2}\varepsilon_r^2\cdot C_0 V_0^2-\frac{1}{2}\varepsilon_r\cdot C_0 V_0$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)C_0 V_0^2$$

ロ　その後のコンデンサーの電圧が V_0' になったとすると

$$V_0'=\frac{Q_1}{C_0}=\frac{\varepsilon_r C_0 V_0}{C_0}=\varepsilon_r V_0$$

ハ　操作(ii)で，コンデンサーA，Bの容量は C_0，$\varepsilon_r C_0$ になっている。操作(iii)の後，コンデンサーBの電圧を V とすると，コンデンサーAの電圧も V である。



電気量保存の法則により，AとBに蓄えられている電気量の和は Q_1 に等しいから

$$C_0 V+\varepsilon_r C_0=Q_1$$

ゆえに　$V=\frac{Q_1}{(\varepsilon_r+1)C_0}=\frac{\varepsilon_r C_0 V_0}{(\varepsilon_r+1)C_0}=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0$

ニ　コンデンサーBに蓄えられた電荷を Q_1' とすると

$$Q_1'=\varepsilon_r C_0 V=\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}C_0 V_0$$

ホ　両コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの和を U とすると

$$U=\frac{1}{2}C_0 V^2+\frac{1}{2}\varepsilon_r C_0 V^2$$

$$=\frac{1}{2}C_0(1+\varepsilon_r)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0\right)^2$$

$$=\frac{\varepsilon_r^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0 V_0^2$$

ヘ　操作(iv)でBの誘電体を抜き取ると，電荷は Q_1' に保たれるが，容量が C_0 になる。このときBの電圧が V' になったとすると

$$V'=\frac{Q_1'}{C_0}=\frac{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}C_0 V_0}{C_0}=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0$$

問1　操作(i)の後に操作(ii)と操作(iii)を行った状態と，操作(i)の後に操作(iii)を行った状態では，コンデンサーAとBが入れ替わっただけであるから，この2つの状態での電圧は等しい。したがって，操作(iii)の後に操作(ii)を行ったところで，コンデンサーAとBが入れ替わっただけであり，やはり電圧は変化しない。操作(i)で初めにコンデンサーAに蓄えられる電荷量は，その後の操作手順に寄らず保存される。よって，操作(ii)と(iii)を逆の手順で行っても電圧は同じになり，容量も同じであるから，両コンデンサーに蓄えられる電荷量も同じになる。

問2　電荷の移動により両コンデンサーが失う静電エネルギーは，電荷が移動する前にコンデンサーAに蓄えられていた静電エネルギーと電荷の移動後のコンデンサーAとBに蓄えられている静電エネルギーの和との差で求められ

$$\frac{1}{2}\varepsilon_r^2 C_0 V_0^2-\frac{\varepsilon_r^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0 V_0^2=\frac{\varepsilon_r^3}{2(\varepsilon_r+1)}C_0 V_0^2$$

電荷の移動量はコンデンサーBに蓄えられた電荷 Q_1' であるから

$$\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}C_0 V_0=IT$$

ゆえに　$I=\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}\cdot\frac{C_0 V_0}{T}$

この電流により，時間 T の間に抵抗で生じるジュール熱は

$$I^2 rT=\left(\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r+1}\cdot\frac{C_0 V_0}{T}\right)^2\cdot rT$$

$$=\frac{\varepsilon_r^4}{(\varepsilon_r+1)^2}\cdot\frac{rC_0^2 V_0^2}{T}$$

失われた静電エネルギーと抵抗で生じるジュール熱が等しいとすると

$$\frac{\varepsilon_r^3}{2(\varepsilon_r+1)}C_0 V_0^2=\frac{\varepsilon_r^4}{(\varepsilon_r+1)^2}\cdot\frac{rC_0^2 V_0^2}{T}$$

よって　$T=\frac{2\varepsilon_r rC_0}{\varepsilon_r+1}$

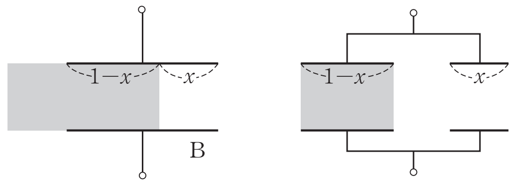
問3　操作(ii)の後のコンデンサーAの電荷は常に $\varepsilon_r C_0 V_0$ となっているから，電圧は $\varepsilon_r V_0$ である。操作(iii)では電荷の移動はないから，コンデンサーBの電圧もAに等しく $\varepsilon_r V_0$ である。したがって，求めるコンデンサーBの電荷量 Q_0 は

$$Q_0=\varepsilon_r C_0\cdot\varepsilon_r V=\varepsilon_r^2 C_0 V_0$$

ト　誘電体が入ったコンデンサーと入っていないコンデンサーが体積比 $(1-x):x$ で並列接続したものになるから，合成容量を $C(x)$ とすると

$$C(x)=\varepsilon_r(1-x)C_0+xC_0$$

$$=\{\varepsilon_r-(\varepsilon_r-1)x\}C_0$$



チ　流れる電流を I とすると　$I=\dfrac{V}{R}$

したがって，$\varDelta t$ の間に流れる電荷は

$$I\cdot\varDelta t=\frac{V}{R}\varDelta t$$

リ　x が増加すると容量は減少していくので，容量の減少量 $\varDelta C$ は

$$\begin{aligned}\varDelta C&=C(x)-C(x+\varDelta x)\\&=\{\varepsilon_r-(\varepsilon_r-1)x\}C_0-\{\varepsilon_r-(\varepsilon_r-1)(x+\varDelta x)\}C_0\\&=(\varepsilon_r-1)C_0\cdot\varDelta x\end{aligned}$$

問４　題意より，コンデンサーBから出ていく電荷を $\varDelta Q$ とすると

$$\varDelta Q=\varDelta C\cdot V=(\varepsilon_r-1)C_0V\cdot\varDelta x$$

これが**チ**の結果と等しいから

$$(\varepsilon_r-1)C_0V\cdot\varDelta x=\frac{V}{R}\cdot\varDelta t$$

よって　$\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}=\dfrac{1}{(\varepsilon_r-1)C_0R}$

ここで $\varDelta C$ は，$\varepsilon_rC_0-C_0=(\varepsilon_r-1)C_0$ までしか変化できないので，最終的な電荷の減少量を $\varDelta Q'$ とすると

$$\varDelta Q'=\varDelta C\cdot V=(\varepsilon_r-1)C_0V$$

また，電圧を一定値 V に保てる時間の最大値を T_m とすると

$$\varDelta Q'=IT_m$$

が成り立つから

$$(\varepsilon_r-1)C_0V=\frac{V}{R}T_m$$

よって　$T_m=(\varepsilon_r-1)C_0R$

Ⅲ　**(1)**　**あ**　光源の速度が v_A，検出器（観測者）の速度が v_B であり，同一直線上を光速 c と同じ正の向きに運動するから，ドップラー効果の公式より

$$f_B=\frac{c-v_B}{c-v_A}f_A=\frac{1-\dfrac{v_B}{c}}{1-\dfrac{v_A}{c}}f_A$$

$$≒\left(1-\frac{v_B}{c}\right)\left(1+\frac{v_A}{c}\right)f_A$$

よって　$\dfrac{f_B}{f_A}≒1-\dfrac{v_B}{c}+\dfrac{v_A}{c}$

$$=1+\frac{v_A-v_B}{c}\quad\cdots①$$

い　等加速度運動の公式より

$$v_B=v_A+at$$

ゆえに　$v_B-v_A=at$　…②

う　箱の速度がゼロであれば，t は光速 c で h の距離を進むのに要する時間となるから

$$t=\frac{h}{c}$$

加速している場合でも t に関しては近似的に $t=\dfrac{h}{c}$ が同様に成り立つので，①，②より

$$\frac{f_B}{f_A}=1+\frac{v_A-v_B}{c}=1-\frac{at}{c}=1-\frac{ah}{c^2}\quad\cdots③$$

え　光源より時間 $\varDelta t_A$ の間に出たパルスの個数と時間 $\varDelta t_B$ の間に検出されたパルスの個数は等しいから，③より

$$f_A\cdot\varDelta t_A=f_B\cdot\varDelta t_B$$

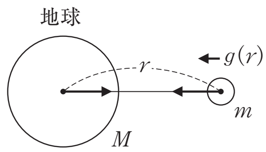
よって　$\dfrac{\varDelta t_B}{\varDelta t_A}=\dfrac{f_A}{f_B}=\dfrac{1}{1-\dfrac{ah}{c^2}}≒1+\dfrac{ah}{c^2}$　…④

(2)　**お**　ニュートン力学では，非慣性系すなわち慣性系に対して加速度を有する座標系では慣性力という特別な力を架空の力として考えるが，アインシュタインは，この力を通常の力と何ら変わりない力であるという立場を原理として，本問のテーマである一般相対性理論を組み立てた。

か　上向きを正とすると加速度が a の場合，慣性力 $-ma$ が作用する。これは見かけ上の重力加速度 $-a$ が生じているのと同じことになる。

（注）　実は我々がよく利用する運動方程式 $\vec{a}=m\vec{F}$ は，一定の力の場合，mが大きくなるほど加速度が小さく，逆にmが小さくなるほど加速度は大きくなり，物体の運動状態の変えやすさ，つまり静止している物体ならば動きやすさ・動きにくさを表現する慣性質量と呼ばれる量である。また，これもよく利用する重力 mg におけるmは，重力の源となる質量で重力質量と呼ばれる。つまり，$m\vec{a}=m\vec{g}$ と表記する場合，左の質量は慣性質量，右の質量は重力質量を表すことになり，そもそも別のものであるが，これらが等価であるという主張が一般相対性理論の扉を開くことになる。

き・く　万有引力の法則により，右図の物体mに作用する力は，求める重力加速度の大きさを $g(r)$ とすると



$$G\frac{mM}{r^2}=mg(r)$$

となる。

よって，地球の中心方向に，大きさ $g(r)=\dfrac{GM}{r^2}$ の加速度を生じる。

け　図２の点線内のように重力加速度 β が下向きに生じている状態は，上向きに大きさ β で加速度運動をしている箱の中の状態と等価であるから，④の a を β に置き換えて

$$\frac{\varDelta t_B}{\varDelta t_A}=1+\frac{\beta h}{c^2}\quad\cdots⑤$$

問１　逆にBからAへ光を送る場合，光源と検出側が入れかわるので f_A と f_B つまり $\varDelta t_A$ と $\varDelta t_B$ が入れかわり，またそうした場合，β を $-\beta$ に置き換えれば⑤式の利用が可能であるから

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=\frac{1}{1+\frac{(-\beta)h}{c^2}}\fallingdotseq 1+\frac{\beta h}{c^2}$$

と同じ式となる。

(3)　こ　AとBの間の重力による位置エネルギーの差は $m\beta h$ であるから

$$m\phi_B-m\phi_A=m\beta h$$

ゆえに　$\phi_B-\phi_A=\beta h$　…⑥

さ　⑥を⑤に代入して

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+\frac{\phi_B-\phi_A}{c^2}$$

問2　題意にしたがうと

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_A}=1+\frac{\phi_1-\phi_A}{c^2}$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=1+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\Delta t_{N-1}}{\Delta t_{N-2}}=1+\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{c^2}$$

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_{N-1}}=1+\frac{\phi_B-\phi_{N-1}}{c^2}$$

が成り立つので，辺々をかけ合わせると

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_A}\cdot\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\cdot\cdots\cdot\frac{\Delta t_{N-1}}{\Delta t_{N-2}}\cdot\frac{\Delta t_B}{\Delta t_{N-1}}$$

$$=\left(1+\frac{\phi_1-\phi_A}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1+\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_B-\phi_{N-1}}{c^2}\right)$$

したがって

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}\fallingdotseq 1+\frac{\phi_1-\phi_A}{c^2}+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{c^2}+\frac{\phi_B-\phi_{N-1}}{c^2}$$

$$=1+\frac{\phi_B-\phi_A}{c^2}\quad\cdots⑦$$

し　万有引力による位置エネルギーの公式より
地球の中心から距離 r だけ離れた点に質量 m の粒子を置いたときの重力の位置エネルギーは

$$-G\frac{Mm}{r}$$

す　$g=\frac{GM}{R^2}$ より，$GM=gR^2$

ゆえに，点Aでの重力ポテンシャル ϕ_A は

$$\phi_A=-\frac{GM}{R}=-gR\quad\cdots⑧$$

点Bでの重力ポテンシャル ϕ_B は

$$\phi_B=-\frac{GM}{R+L}=-g\frac{R^2}{R+L}\quad\cdots⑨$$

せ　⑦に⑧，⑨を代入して

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+\frac{-g\frac{R^2}{R+L}+gR}{c^2}$$

$$=1+\frac{gR}{c^2}\left(1-\frac{R}{R+L}\right)$$

$$=1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}\quad\cdots⑩$$

そ　人工衛星Cは等速円運動をしているとすると，中心方向の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{R+L}=mg\left(\frac{R}{R+L}\right)^2$$

ゆえに　$v^2=\frac{gR^2}{R+L}$

題意より

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_B}=1-\frac{v^2}{2c^2}=1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}\quad\cdots⑪$$

（注）　特殊相対性理論とは

Ⅰ　物理法則は，たがいに等速度で運動する座標系では同じ形で与えられる。

Ⅱ　真夜中の光速は光源の速度に関係なく，どの慣性系で見ても一定である。

を原理として展開された理論で，これに基づくと

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_B}=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

の関係が得られる。つまり，速い速度であるほど時間がゆっくり進むことがわかる。

問3　⑩，⑪より

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_A}=\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}\cdot\frac{\Delta t_C}{\Delta t_B}$$

$$=\left\{1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}\right\}\left\{1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}\right\}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$

$$=1+\frac{gR(2L-R)}{2c^2(R+L)}$$

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+\frac{9.8\times6.0\times10^6\times3.0\times10^7}{(3.0\times10^8)^2\times(6.0\times10^6+3.0\times10^7)}$$

$$=1+5.44\times10^{-10}\fallingdotseq 1+5.4\times10^{-10}$$

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_B}=1-\frac{9.8\times(6.0\times10^6)^2}{2\times(3.0\times10^8)^2\times(6.0\times10^6+3.0\times10^7)}$$

$$=1-5.44\times10^{-11}\fallingdotseq 1-5.4\times10^{-11}$$

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_A}=(1+5.44\times10^{-10})(1-5.44\times10^{-11})$$

$$\fallingdotseq 1+5.44\times10^{-10}-5.44\times10^{-11}$$

$$=1+4.89\times10^{-10}$$

$$\fallingdotseq 1+4.9\times10^{-10}$$

（注）　衛星は半日で地球を1周する速度をもっている。このため，本問で見てきた様に特殊相対性理論的効果が無視できず，地上より最終的に 4.9×10^{-10} 秒程速く進むので，それだけ遅らせた信号を地上に送るようにしなければ，GPS は機能しなくなる。