未名天留学
学语言・办留学・一站解决

受験サプリ　名古屋大学　情報文化学部(自然情報学科)/理学部/医学部/工学部/農学部
2012年度　数学　前期試験

解答　Ⅰ　(1)　$S(t)=\dfrac{27}{4}t^4$　　(2)　$b<-2a^3$ または $6a^3<b$ のとき1本，$b=-2a^3$ または $b=6a^3$ のとき2本，$-2a^3<b<6a^3$ のとき1本　　(3)　16　　Ⅱ　(1)　$f_1(x)=2x\ell^x+(x+1)\ell^{-x}$　　(2)　0　　(3)　$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})\ell^x$

Ⅲ　(1)　$\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$　　(2)　$\dfrac{6k}{n^3}$　　(3)　$P(s)=\dfrac{6s(n-s)}{n^3}$　　(4)　$s=\dfrac{n}{2}$　　Ⅳ　(1)　-5050　　(2)(3)(4)　解説参照

解説　Ⅰ　(1)　$y=x^3-a^2x$　より　$y'=3x^2-a^2$

よって，ℓ の方程式は

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t)$$
$$y=(3t^2-a^2)x-2t^3 \quad \cdots ①$$

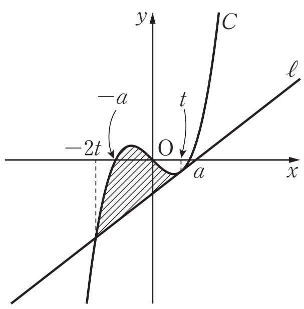
C と ℓ の共有点の x 座標を求めると

$$x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3$$
$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

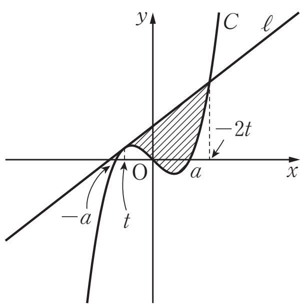
ゆえに　$x=t,\ -2t$

$C：y=x(x+a)(x-a)$ より，次の図のようになる。

$t>0$ のとき



$t<0$ のとき



したがって，$t>0$ のとき

$$S(t)=\int_{-2t}^{t}\{(x^3-ax^2)-(3t^2-a^2)x+2t^3\}dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\}dx$$
$$=\left[\frac{(x-t)^4}{4}+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}$$
$$=-\frac{81t^4}{4}+27t^4=\frac{27}{4}t^4$$

また，$t<0$ のとき

$$S(t)=\int_{t}^{-2t}(x-t)^2(x+2t)dx$$
$$=\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)dx$$
$$=\frac{27}{4}t^4$$

よって　$S(t)=\dfrac{27}{4}t^4$

(2)　ℓ が点Bを通るとき，①に $x=2a$，$y=b$ を代入して

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3$$
$$b=-2t^3+6at^2-2a^3 \quad \cdots ②$$

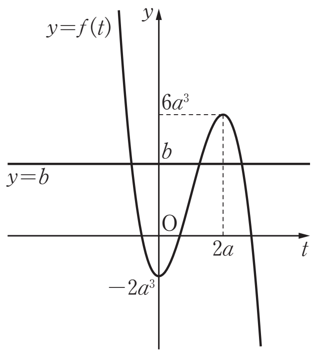
等式②を満たす実数 t の個数が求める接線の本数と等しい。よって，②の右辺を $f(t)$ とおき2つのグラフ $y=f(t)$，$y=b$ の共有点の個数を調べる。

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

$a>0$ より，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 $-2a^3$	↗	極大 $6a^3$	↘

ここからグラフをかくと



$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$ より，接線の本数は

$$\begin{cases} b<-2a^3 \text{ または } 6a^3<b \text{ のとき} & 1本 \\ b=-2a^3 \text{ または } b=6a^3 \text{ のとき} & 2本 \\ -2a^3<b<6a^3 \text{ のとき} & 3本 \end{cases}$$

(3)　$b=-2a^3$ のとき，②に代入して整理すると

$$2t^2(t-3a)=0 \quad より \quad t=0,\ 3a$$

ここで，$t=0$ の場合の接線は①より $y=-a^2x$ となるので原点を通る。よって　$b\neq -2a^3$　である。$b=6a^3$ のとき，②に代入して整理すると

$$t^3-3at^2+4a^3=0$$
$$(t+a)(t-2a)^2=0$$

よって，このとき接点の x 座標は $-a$ および $2a$ であり，いずれも接線は原点を通らない。(1)の結果より

$$S(-a)=\frac{27}{4}(-a)^4=\frac{27}{4}a^4$$
$$S(2a)=\frac{27}{4}(2a)^4=\frac{27}{4}a^4\times 16$$

であるから　$S_1=S(2a)$，$S_2=S(-a)$

よって　$\dfrac{S_1}{S_2}=16$

Ⅱ　p，q を定数として

$$\{(px+q)e^x\}'=pe^x+(px+q)e^x$$
$$=(px+q+p)e^x \quad \cdots ①$$

であるから，$p=a$，$q+p=b$ とおくと $q=b-a$ より

$$\int(ax+b)e^xdx=(ax+b-a)e^x+C \quad \cdots ②$$

电话：400-6321-400/13601043104(微信)　QQ：1925811302
地址：北京市海淀区海淀路北大资源东楼 1433 室

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ただし，C は積分定数。

(1)　①，②を用いて

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x} te^t dt+(xe^x)'$$
$$=\Big[(t-1)e^t\Big]_{-x}^{x}+(x+1)e^x$$
$$=(x-1)e^x-(-x-1)e^{-x}+(x+1)e^x$$
$$=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　②より

$$g(x)=\Big[(at+b-a)e^t\Big]_{-x}^{x}$$
$$=(ax+b-a)e^x-(-ax+b-a)e^{-x}$$
$$=(ax+b-a)e^x+(ax-b+a)e^{-x}$$

ここで

$$g(-x)=(-ax+b-a)e^{-x}+(-ax-b+a)e^x$$
$$=-(ax+b-a)e^x-(ax-b+a)e^{-x}$$
$$=-g(x)$$

となるから，$g(x)$ は奇関数である。よって

$$\int_{-x}^{x} g(t)dt=0$$

(3)　($f_2(x)$ を計算すると $(3x+2)e^x$ となることから)

$n=0$，1，2，…について；a_n，b_n を定数として

$$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x \quad \cdots(※)$$

と表されることを数学的帰納法で証明する。

[Ⅰ]　$n=0$ のとき，$a_0=1$，$b_0=0$ であるから(※)は成り立つ。

[Ⅱ]　$n=k$ のとき，(※)が成り立つと仮定すると

$$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$$

である。このとき

$$f_{2k+1}(x)=\int_{-x}^{x} f_{2k}(t)dt+f'_{2k}(x)$$

より，$gk(x)=\int_{-x}^{x} f_{2k}(t)dt=\int_{-x}^{x}(a_kt+b_k)dt$ とおくと

$$f_{2k+1}(x)=gk(x)+f'_{2k}(x)$$

さらに

$$f_{2k+2}(x)$$
$$=\int_{-x}^{x} f_{2k+1}(t)dt+f'_{2k+1}(x)$$
$$=\int_{-x}^{x}\{g_k(t)+f'_{2k}(t)\}dt+g'_k(x)+f''_{2k}(x)$$

ここで，(2)より

$$\int_{-x}^{x} g_k(t)dt=0$$

であり，$f_k(x)$ の不定積分の1つを $F_k(x)$ とすると

$$g'_k(x)=\{F_{2k}(x)-F_{2k}(-x)\}'$$
$$=f_{2k}(x)+f_{2k}(-x)$$

となることから

$$f_{2k+2}(x)$$
$$=\Big[f_{2k}(t)\Big]_{-x}^{x}+f_{2k}(x)+f_{2k}(-x)+f''_{2k}(x)$$
$$=2f_{2k}(x)+f''_{2k}(x)$$
$$=2(a_kx+b_k)e^x+(a_kx+b_k+2a_k)e^x$$

(①より)

$$=(3a_kx+3b_k+2a_k)e^t$$

したがって

$$a_{k+1}=3a_k \qquad b_{k+1}=3b_k+2a_k$$

そして，$n=k+1$ のときも(※)が成り立つ。

[Ⅰ][Ⅱ]より，$n=0$，1，2，…について(※)が成り立つ。

$$a_0=1,\ a_{n+1}=3a_n$$

であるから　$a_n=3^n$

これと　$b_{n+1}=3b_n+2a_n$　から

$$b_{n+1}=3b_n+2\cdot 3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{2}{3}$$

ゆえに，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{3^n}\right\}$ は公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列である。

初項を　$\dfrac{b_0}{3^0}=\dfrac{0}{1}=0$　として

$$\frac{b_n}{3^n}=0+n\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n}{3}$$

より　$b_n=2n\cdot 3^{n-1}$

よって　$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})e^x$

Ⅲ　3回の試行でカードの取り出し方は全部で n^3 通り。

(1)　j 以上 $j+k$ 以下の整数の個数は

$$j+k-j+1=k+1(\text{個})$$

よって，3回ともこの範囲のカードを取り出すのは

$(k+1)^3$ 通り

したがって，求める確率は　$\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$

(2)　(1)の $(k+1)^3$ 通りのうち適さないのは

(i)　$X\geqq j+1$　または　(ii)　$Y\leqq j+k-1$ となる場合である。

(i)は「$X\geqq j+1$　かつ　$Y\leqq j+k$」より

$(k+1-1)^3=k^3$(通り)

(ii)は「$X\geqq j$　かつ　$Y\leqq j+k-1$」より

$(k+1-1)^3=k^3$(通り)

(i)かつ(ii)は「$X\geqq j+1$　かつ　$Y\leqq j+k-1$」より $k\geqq 2$ ならば $(k+1-2)^3=(k-1)^3$(通り)

ただし，$k=1$ のときもこれは正しい。

よって適する場合は

$(k+1)^3-\{k^3+k^3-(k-1)^3\}=6k$(通り)

したがって，求める確率は　$\dfrac{6k}{n^3}$

【別解】　次のように場合分けをしてもよい。

・3枚が j，l，$j+k$ ($l=j+1$，$j+2$，…，$j+k-1$) の場合は(結果的に $k=1$ のときも含めて)

　$3!(k-1)=6k-6$(通り)

・3枚が j，j，$j+k$ の場合は3通り。

・3枚が j，$j+k$，$j+k$ の場合は3通り。

したがって，求める確率は　$\dfrac{(6k-6)+3+3}{n^3}=\dfrac{6k}{n^3}$

电话：400-6321-400/13601043104（微信）　QQ：1925811302
地址：北京市海淀区海淀路北大资源东楼 1433 室

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　次のいずれかの場合である。

「$X=1$　かつ　$Y=1+s$」
「$X=2$　かつ　$Y=2+s$」
………
「$X=n-s$ かつ $Y=n$」

どの場合の確率も(2)の結果より $\dfrac{6s}{n^3}$ であるから

$$P(s)=(n-s)\cdot\frac{6s}{n^3}=\frac{6s(n-s)}{n^3}$$

(4)　$P(s)=\dfrac{6}{n^3}(-s^2+ns)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

n が 2 以上の偶数なので，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であって

$\dfrac{n}{2}\leqq n-1$ が成り立つ。よって $P(s)$ を最大にする s は

$$s=\frac{n}{2}$$

Ⅳ　(1)　二項定理より

$$\begin{aligned}&(x-1)^{101}\\&={}_{101}\mathrm{C}_0x^{101}+{}_{101}\mathrm{C}_1x^{100}(-1)+\cdots+{}_{101}\mathrm{C}_{99}x^2(-1)^{99}\\&\qquad+{}_{101}\mathrm{C}_{100}x(-1)^{100}+{}_{101}\mathrm{C}_{101}(-1)^{101}\end{aligned}$$

よって，x^2 の項の係数は

$${}_{101}\mathrm{C}_{99}(-1)^{99}={}_{101}\mathrm{C}_2(-1)=-5050$$

(2)　二項定理を使い，m が奇数であることに注意すると

$$\begin{aligned}&(p-1)^m+1\\&={}_m\mathrm{C}_0p^m+{}_m\mathrm{C}_1p^{m-1}(-1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}p(-1)^{m-1}\\&\qquad+{}_m\mathrm{C}_m(-1)^m+1\\&=p\{{}_m\mathrm{C}_0p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1p^{m-2}(-1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}\}\\&\qquad+(-1)+1\\&=p\{{}_m\mathrm{C}_0p^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_1p^{m-2}(-1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}\}\end{aligned}$$

{　}内は整数であるから，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　(2)の{　}内の項

$${}_m\mathrm{C}_{m-1}(-1)^{m-1}={}_m\mathrm{C}_1=m$$

は，仮定より p で割り切れない。
一方，{　}内の他の項はどれも p で割り切れる。
よって，{　}内は p で割り切れず，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　r が正の整数のとき

　$2^{3^{r-1}m}+1$ は 3^r で割り切れる　…(※)　ことを数学的帰納法で示す。

[Ⅰ]　$r=1$ のとき

$$2^m+1=(3-1)^m+1$$

であるから，(2)より 3 で割り切れ，(※)が成り立つ。

[Ⅱ]　$r=k$ のとき(※)が成り立つと仮定すると，l を整数として

$$2^{3^{k-1}m}+1=3^kl$$

すなわち　$2^{3^{k-1}m}=3^kl-1$　…①　と表せる。

このとき　$3^km=3^{(k-1)+1}m=3^{k-1}\cdot3^1m=3^{k-1}m\cdot3$　であるから

$$\begin{aligned}2^{3^km}+1&=2^{3^{k-1}m\cdot3}+1\\&=(2^{3^{k-1}m})^3+1\\&=(3^kl-1)^3+1\quad(①より)\\&=(3^kl)^3-3(3^kl)^2+3(3^kl)-1+1\\&=3^{k+1}(3^{2k-1}l^3-3^kl^2+l)\end{aligned}$$

(　)内は整数であるから，これは 3^{k+1} で割り切れ，
$r=k+1$ のときも(※)が成り立つ。

[Ⅰ][Ⅱ]より，r が正の整数のとき(※)が成り立つ。

电话: 400-6321-400/13601043104(微信)　QQ: 1925811302
地址: 北京市海淀区海淀路北大资源东楼 1433 室

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。