京都大学　工学部/理学部/農学部/医学部/総合人間学部<理系>/教育学部<理系> 経済学部<理系>/薬学部　2012年度　数学　前期試験

答　Ⅰ (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1 & (0<a\leqq 1\text{ のとき})\\ a & (1<a\text{ のとき})\end{cases}$　(2) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2+\dfrac{\pi}{12}$

Ⅱ　解答参考　　Ⅲ　$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$　　Ⅳ　解答参考

Ⅴ　解答参考　　Ⅵ　$p_n=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

Ⅰ **解答** (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$　…①

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{a^n\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a\left(1+\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}\quad\cdots②$$

〔1〕　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より　$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1$ であるから

はさみうちの原理より

①$=1$

〔2〕　$1<a$ のとき

$1<1+\dfrac{1}{a^n}<2$ より

$$a<a\left(1+\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}<a\cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a\cdot 2^{\frac{1}{n}}=a\cdot 2^0=a$ であるから

はさみうちの原理より

②$=a$

以上より

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1 & (0<a\leqq 1\text{ のとき})\\ a & (1<a\text{ のとき})\end{cases}$$

(2) $$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}x^{-2}\log(1+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4-\log 2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2$$

$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$1\to\sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようになるから

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$

解説 (1)　極限値計算は「収束する項をつくる」が基本。本問も

$0<a\leqq 1$ のとき　(ケース①)

$1<a$ のとき　(ケース②)

と２つに場合分けすることがポイントとなる。

以下，はさみうちの原理を用いればよい。

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}x^{-2}\log(1+x^2)\,dx$

の計算は，x^{-2} を積分側，$\log(1+x^2)$ を微分側にして，部分積分すると，$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$ が現れる。この形の積分では，$x=\tan\theta$ と置換することで値を求めることができる。

Ⅱ　OA＝OB＝OC＝1 としても一般性は失われない。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

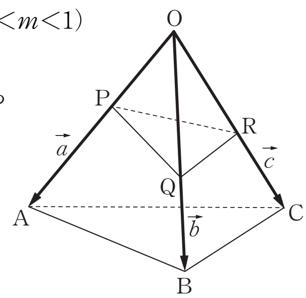
$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\\[4pt] \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\cdots(*)$$

が成り立つ。

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\ell\vec{b}$　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=m\vec{c}$

$(0<k<1,\ 0<l<1,\ 0<m<1)$

とかける。



△PQR が正三角形であるから

PQ＝QR＝RP

したがって

$$|\ell\vec{b}-k\vec{a}|^2=|m\vec{c}-\ell\vec{b}|^2$$
$$=|k\vec{a}-m\vec{c}|^2$$

$(*)$を用いると

(左辺)＝(中辺)より　$-\ell k+k^2=m^2-\ell m$

$(k-m)(k+m-\ell)=0$

ゆえに　$k=m$　…①　または　$k+m=\ell$　…②

(中辺)＝(右辺)より　$-\ell m+\ell^2=k^2-mk$

$(\ell-k)(\ell+k-m)=0$

ゆえに　$\ell=k$　…③　または　$\ell+k=m$　…④

①かつ④のとき　　$\ell+m=m$ より，$\ell=0$ となり，

$0<\ell<1$ に矛盾

同様に②かつ③も矛盾

また，②かつ④も $k+\ell+k=\ell$ より，$k=0$ となり，

$0<k<1$ に矛盾

ゆえに　①かつ③　すなわち　$k=\ell=m$

これより　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\vec{b}-k\vec{a}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\vec{c}-k\vec{b}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=k\vec{a}-k\vec{c}=k\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

よって　PQ∥AB，QR∥BC，RP∥CA

解説　正四面体は京大では頻出である。本問は PQ∥AB など「平行」を示したいので，ベクトルの利用が有効である。次の〔1〕，〔2〕の順に考えていく。

〔1〕　条件の PQ＝QR＝RP を，ベクトルの内積を利用して整理すると

$$\begin{cases}(k-m)(k+m-\ell)=0 \\ (\ell-k)(\ell+k-m)=0\end{cases} \quad \cdots(※)$$

を得る。

〔2〕　$0<k<1$，$0<\ell<1$，$(0<m<1)$に注意して，$k=\ell=m$ を導く。

（注）　$0<k\leqq\ell\leqq m$ としても一般性は失われず，(※)から，$k+m-\ell>0$ より

$k=m$　　同様に　$\ell=k$

すなわち　$k=\ell=m$

としてもよい。

Ⅲ　解答　条件式　$x^2+xy+y^2=6$ より

$(x+y)^2-xy=6$

$x+y=p$，$xy=q$　…①

とおくと　$p^2-q=6$

ゆえに　$q=p^2-6$　…②

また，①より，x，y を解とする2次方程式は

$t^2-pt+q=0$

であり，これが実数解をもつことから，判別式を D とすると　$D=p^2-4q\geqq0$

すなわち　$q\leqq\dfrac{1}{4}p^2$　…③

②，③より　$p^2-6\leqq\dfrac{1}{4}p^2$　　$p^2\leqq8$

したがって　$-2\sqrt{2}\leqq p\leqq2\sqrt{2}$　…④

ここで　$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$

$=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)$

$=pq-p^2+p$

$=p(p^2-6)-p^2+p$　（①より）

$=p^3-p^2-5p$

$f(p)=p^3-p^2-5p$ とおくと，題意は，④の条件のもとで $f(p)$ のとり得る値の範囲を求めることである。

$f'(p)=3p^2-2p-5$

$=(p+1)(3p-5)$

$f'(p)=0$ のとき　$p=-1,\ \dfrac{5}{3}$

$f(-1)=3,\ f\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{175}{27}$

$f(-2\sqrt{2})=-8-6\sqrt{2},\ f(2\sqrt{2})=-8+6\sqrt{2}$

ゆえに，$f(p)$ の増減表は次のようになる。

p	$-2\sqrt{2}$	…	-1	…	$\frac{5}{3}$	…	$2\sqrt{2}$
$f'(p)$		+	0	−	0	+	
$f(p)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$

ここで

$$-8-6\sqrt{2}-\left(-\frac{175}{27}\right)$$

$=-\dfrac{41}{27}-6\sqrt{2}<0$ より

$-8-6\sqrt{2}<-\dfrac{175}{27}$

$3-(-8+6\sqrt{2})$

$=11-6\sqrt{2}$

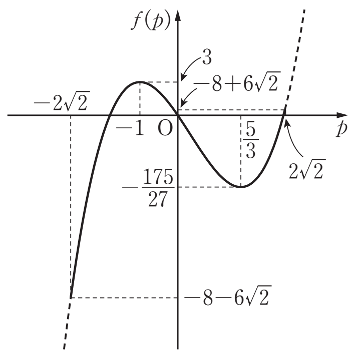
$=\sqrt{121}-\sqrt{72}>0$　より

$3>-8+6\sqrt{2}$

以上より，求める範囲は

$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy$

$-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq3$



解説　条件式と与式がともに x と y の対称式であるから，

$x+y=p$，$xy=q$

とおいて，よりシンプルな p，q の式に直してからスタートしよう。その際，x，y がともに実数であることから，$t^2-pt+q=0$ の実数解条件

$p^2-4q\geqq0$

が付け加わることを忘れないように。

条件式　$q=p^2-6$　から q を消去して，与式$=f(p)$ とおくと

$f(p)=$（p の3次式）

となる。以下，p の範囲の下で $f(p)$ の増減表またはグラフから，$f(p)$ の最大値，最小値を捉えて $f(p)$ の範囲を求めればよい。

Ⅳ　解答　(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数でない，すなわち有理数であるとすると

$\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$　（p，q は互いに素な自然数　…(※)）

と表される。

両辺を3乗すると

$2=\dfrac{q^3}{p^3}$　　ゆえに　$q^3=2p^3$

右辺は偶数であるから，q も偶数であり

$q=2m$　（m は自然数）　…①

とおける。これを上式に代入すると

$8m^3=2p^3$　　ゆえに　$p^3=4m^3$

右辺は偶数であるから，p も偶数であり

$p=2n$　（n は自然数）　…②

とおける。

①，②は(※)に矛盾する。

よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である。

(2)　$P(x)$ を x^3-2 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c（a，b，c は有理数　…(×)）とすると

$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$　…①

とおける。

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ として，①に $x=\alpha$ を代入すると

$P(\alpha)=(\alpha^3-2)Q(\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$

$P(\alpha)=0$ と $\alpha^3=2$ から

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$　…②

が成り立つ。

②において，$a\neq0$ と仮定すると

$\alpha^2+\dfrac{b}{a}\alpha+\dfrac{c}{a}=0$

$\dfrac{b}{a}=b'$，$\dfrac{c}{a}=c'$ とおくと，(×)より b'，c' は有理数で

$\alpha^2+b'\alpha+c'=0$

$\alpha^2=-b'\alpha-c'$　…③

③より　$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=(-b'\alpha-c')\cdot\alpha$

$=-b'(-b'\alpha-c')-c'\alpha$

$=(b'^2-c')\alpha+b'c'$

これと $\alpha^3=2$ より

$(b'^2-c')\alpha+(b'c'-2)=0$

b'，c' は有理数であり，(1)より α は無理数であるから

$b'^2-c'=0$　かつ　$b'c'-2=0$

c' を消去すると　$b'^3=2$

b' は実数より　$b'=\sqrt[3]{2}$

したがって，(1)より b' は無理数となるが，これは b' が有理数である仮定に矛盾する。

ゆえに　$a=0$　でなければならない。

このとき，②より　$b\alpha+c=0$

b，c は有理数であり，α は無理数であるから

$b=c=0$

よって　$P(x)=(x^3-2)Q(x)$

となり，$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。

〔別解〕 ②までは同じ。

②×α より　$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0$

$2a+b\alpha^2+c\alpha=0$　…④

②×b－④×a より

$(b^2-ac)\alpha+bc-2a^2=0$　…⑤

ここで，$b^2-ac\neq0$ とすると

$\alpha=\dfrac{2a^2-bc}{b^2-ac}$

となり，(1)に矛盾する。

ゆえに　$b^2-ac=0$　…⑥

となり，⑤より

$bc-2a^2=0$　…⑦

⑥，⑦より　$b^3-2a^3=0$

$a\neq0$ とすると　$\sqrt[3]{2}=\dfrac{b}{a}$　となり，(1)に矛盾する。

よって　$a=0$

以下，(本解)と同じ。

解説 (1)　無理数であることを示す典型的な証明であり，背理法が有効である。

$\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ (p，q は互いに素な自然数)とおけると仮定して，「p，q が互いに素であることに矛盾する」を狙う。

(2)　次の〔1〕，〔2〕の順に考えていく。

〔1〕　余りを ax^2+bx+c として

$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

とおいて

(余り)$=0$

を示せばよい。

そこで，$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とおくと，$P(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$ であり，条件 $P(\alpha)=0$ とから

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$

〔2〕　背理法を用いる。

$a\neq0$ とすると

$\alpha^2=-\dfrac{b}{a}\alpha-\dfrac{c}{a}=-b'\alpha-c'$　(b'，c' は有理数)

とかける。

これと，α^3-2 から，次数下げを行い

(有理数)・α＋〈有理数〉$=0$

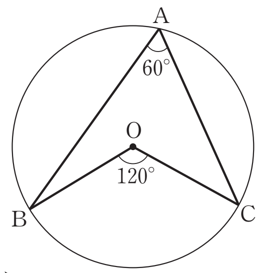
とかける。

ここで，(1)より，α は無理数であるから

(有理数)$=0$，〈有理数〉$=0$

となり，以下「解答」のように矛盾が示せる。

V　**解答**　(p)　正しい。



右図のように，正 n 角形の外接円を考えて外心をOとする。正 n 角形の n 個の頂点のうち3点をA，B，Cとし

$\angle BAC=60^\circ$

としてもよい。

すると，中心角と円周角の関係から

$\angle BOC=2\angle BAC=120^\circ$

であり，2点B，Cは正 n 角形の頂点であるから

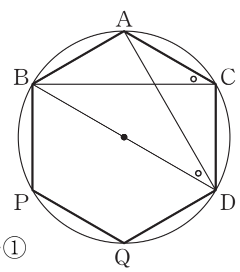
$\angle BOC=\dfrac{360^\circ}{n}\times k$　(k は自然数)

とかける。

よって　$120^\circ=\dfrac{360^\circ}{n}\times k$ より　$n=3k$

すなわち　n は3の倍数である。

(q)　正しくない。



1辺の長さが1である正六角形ABPQDCを考える。

$AC=1$，$AD=\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{3}$，$BD=2$

より

$AC<AD$　かつ　$BC<BD$　…①

次に，正六角形ABPQDCに外接する円を考えると

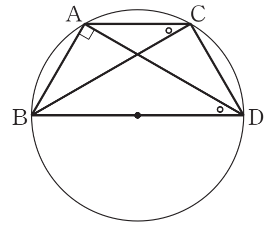
$\angle ACB=\angle ADB$　($\overset{\frown}{AB}$ の円周角)

すなわち，△ABCと△ABDにおいて

$\angle C=\angle D$　…②

①，②より，反例があり，(q)は偽である。

(注)　(q)の反例について



BDを直径とする円周上に右図のようにA，Cをとる。

$BC<$(直径)$=BD$

であり

$\angle ACD=180^\circ-\angle ABD$

(内接四角形ABDCより)

$>180^\circ-90^\circ$　(△ABDで $\angle BAD=90^\circ$ より)

$=90^\circ$

ゆえに，△ACDにおいて，ADが最大辺であるから

AD＞AC

さらに，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$の円周角より

∠ACB＝∠ADB

としてもよい。

解説　(p)　正n角形の外接円(外心をOとする)にのせて考えたい。

(中心角)＝2×(円周角)

であることと

$$\angle \mathrm{BOC}=\frac{360^\circ}{n}\cdot k \quad (k\text{は自然数})$$

から

$n=3k$

がいえる。

(q)　(p)と同様，外接円にのせると

(円周角)＝一定

が利用できて

∠C＝∠D

となる反例が探しやすい。

VI　**解答**　$Y_1=X_1\geqq 1$であり，$Y_n=X_n+\frac{1}{Y_{n-1}}$から

帰納的に　$Y_n\geqq 1$　…①

したがって　$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$　…②を満たすX_nは

$X_n=1$　または　$X_n=2$

だけである。

(i)　$X_n=1$のとき

②は　$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 1+\frac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$

①より右側の不等式は成り立つので

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqq\frac{1}{Y_{n-1}}$$

すなわち　$Y_{n-1}\leqq 1+\sqrt{3}$

(ii)　$X_n=2$のとき

②は　$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 2+\frac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{3}-3}{2}\leqq\frac{1}{Y_{n-1}}\leqq\sqrt{3}-1$$

①より左側の不等式は成り立つので

$$Y_{n-1}\geqq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i)，(ii)より　$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$　となるのは

・$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_{n-1}\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき　$X_n=1$　または　$X_n=2$

・$Y_{n-1}<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき　$X_n=1$

・$Y_{n-1}>1+\sqrt{3}$ のとき　$X_n=2$

である。

そこで

$Y_n<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる確率を q_n

$1+\sqrt{3}<Y_n$ となる確率を r_n

とすると

$$p_n=\frac{2}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

ここで　$p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1}=1$　であるから

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})$$

すなわち　$p_n=\frac{1}{6}(p_{n-1}+1)$

ゆえに　$p_n-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_{n-1}-\frac{1}{5}\right)$　$(n\geqq 2)$

$Y_1=X_1=2$　から　$p_1=\frac{1}{6}$　より

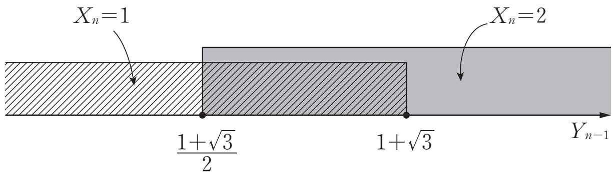
$$p_n-\frac{1}{5}=\left(p_1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{30}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって　$p_n=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

解説　次の〔1〕，〔2〕の順に考えていく。

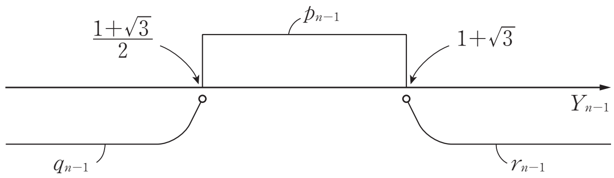
〔1〕　$1\leqq X_n\leqq 6$であり，$Y_n\geqq 1$とから，②を満たすX_nは，$X_n=1$　または　$X_n=2$　としぼり込むことができる。

〔2〕　$X_n=1$のとき，$X_n=2$のときのY_{n-1}の範囲をそれぞれ調べると

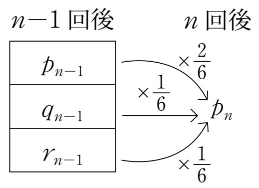


となる。

これより，Y_{n-1}の範囲を3つに分けて考察することができる。



すると，右図より



$$p_n=\frac{2}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}$$

であり，$p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1}=1$

とから

$\{p_n\}$の漸化式　$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}$　$(n\geqq 2)$

が作れる。

確率は問題全体の状況を捉えることが大切!!

上のように(モデル)図などを積極的に描いてアプローチしてみよう。