京都大学　工学部/理学部/農学部/医学部/総合人間学部<理系>/教育学部<理系>
経済学部<理系>/薬学部　2012年度　数学　前期試験

Ⅰ

次の各問に答えよ。

(1)　a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(2)　定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。

Ⅱ

正四面体OABCにおいて，点P，Q，Rをそれぞれ辺OA，OB，OC上にとる。ただしP，Q，Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする。△PQRが正三角形ならば，３辺PQ，QR，RPはそれぞれ３辺AB，BC，CAに平行であることを証明せよ。

Ⅲ

実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅳ

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

Ⅴ

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から３点を選んで内角の１つが60°である三角形を作ることができるならば，n は３の倍数である。

(q)　△ABCと△ABDにおいて，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，∠C＞∠D である。

Ⅵ

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める。

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ。