**I**　次の文章を読んで，$\boxed{\phantom{XX}}$に適した式を記せ。なお，$\boxed{\phantom{XX}}$はすでに$\boxed{\phantom{XX}}$で与えられたものと同じ式を表す。また，**問1**，**問2**では，指示にしたがって，解答をそれぞれ記せ。

質量$m_1$，$m_2$，$m_3$，半径$l_1$，$l_2$，$l_3$の円盤状の物体1，物体2，物体3の運動を考える。**図1**のように，物体1は水平な床の上に置かれている。物体1の上面は床に平行で，物体1の上に物体2が置かれている。物体1と物体2は互いに固定されておらず，各々の中心が$x$座標の原点で静止している。時刻0において物体3が左から物体1に衝突した。衝突後，物体1が動き出し，物体2は物体1との接触面上を滑り出した。衝突にかかる時間は十分短く，物体3が物体1に衝突した直後の物体2の床に対する速度は0であるとする。真上から見ると，物体1，物体2，物体3の中心は常に同一直線上にあるものとする。物体1と床の間の動摩擦係数を$\mu_1$，物体1と物体2の間の動摩擦係数を$\mu_2$，物体1と物体3の間のはね返り係数を$e$，重力加速度を$g$とする。

位置，速度，加速度は右向きを正にとり，速度および加速度は床に対するものと定義する。また，空気抵抗は無視する。

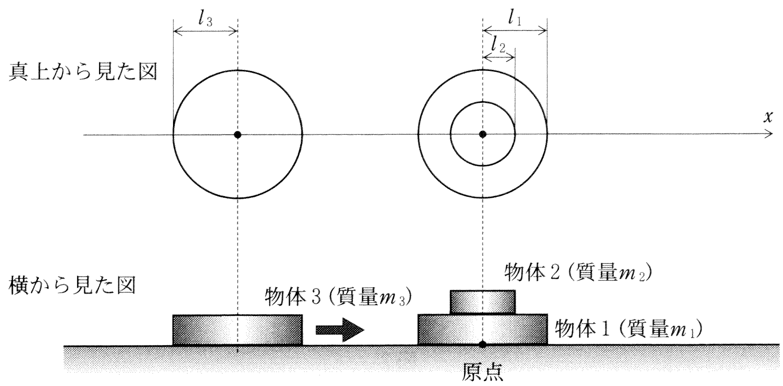



**図1**

(1)　物体3が物体1に衝突する直前の物体3の速度を$v_0$とする。物体3が物体1に衝突した直後の物体1の速度は$v=\boxed{\text{ア}}$，物体3の速度は$\boxed{\text{イ}}$である。物体2は物体1の上面からはみ出すことなく運動し，時刻$T_A$において物体1と物体2の相対速度が0となった。その後，両者は一体となって運動を続け，時刻$T_B$において静止した。時刻0から$T_A$までの物体1と物体2の加速度を$a_1$，$a_2$とし，$T_A$から$T_B$までの物体1の加速度を$a'$，$T_A$での物体1の速度を$v'$とする。また時刻$T_A$での物体1と物体2の中心の位置を$x_1$，$x_2$とし，$T_B$での物体1の中心の位置を$x_B$とする。$a_1$，$a_2$，$a'$は$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$のうち必要なものを用いると，$a_1=\boxed{\text{ウ}}$，$a_2=\boxed{\text{エ}}$，$a'=\boxed{\text{オ}}$と表せる。

**問1**　**図2**に，時刻0から$T_B$までの物体1，物体2の速度，加速度のグラフを描け。ただし，物体1と物体2のグラフは1つのグラフにまとめて作成し，(a)には横軸が時刻，縦軸が速度のグラフを，(b)には横軸が時刻，縦軸が加速度のグラフを描け。またグラフ中に，$a_1$，$a_2$，$a'$，$v$，$v'$，$T_A$，$T_B$を明示せよ。

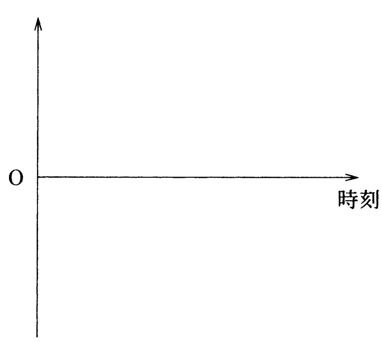



**図2**

$T_A$および$v'$は$a_1$，$a_2$，$v$を用いると，$T_A=\boxed{\text{カ}}$，$v'=\boxed{\text{キ}}$と表せる。また$T_B$は$a_1$，$a_2$，$a'$，$v$のうち必要なものを用いると，$T_B=\boxed{\text{ク}}$と表せる。さらに，$a_1=\boxed{\text{ウ}}$，$a_2=\boxed{\text{エ}}$，$a'=\boxed{\text{オ}}$を$T_A=\boxed{\text{カ}}$，$T_B=\boxed{\text{ク}}$に代入することで，$T_A$，$T_B$は，$v$，$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$のうち必要なものを用いると，$T_A=\boxed{\text{ケ}}$，$T_B=\boxed{\text{コ}}$と表せる。

「物体2は物体1の上面からはみ出すことなく運動」するという条件は，$l_1$，$l_2$ および $v$，$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$ のうち必要なものを用いると，$\boxed{\text{サ}}$ と表せる。また $x_{\mathrm{B}}$ は，$v$，$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$ のうち必要なものを用いると，$x_{\mathrm{B}}=\boxed{\text{シ}}$ と表せる。

(2)　物体1と物体2の運動をエネルギー保存の観点から考える。物体3が物体1に衝突した直後の物体1と物体2の運動エネルギーの総和は，$v$，$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$ のうち必要なものを用いると，$\boxed{\text{ス}}$ と表せる。一方，時刻0から $T_{\mathrm{B}}$ までに，物体1と床の間の摩擦で失われるエネルギー $E_1$，および物体1と物体2の間の摩擦で失われるエネルギー $E_2$ は，$m_1$，$m_2$，$\mu_1$，$\mu_2$，$g$，$x_1$，$x_2$，$x_{\mathrm{B}}$ のうち必要なものを用いると，$E_1=\boxed{\text{セ}}$，$E_2=\boxed{\text{ソ}}$ と表せる。上で求めた $x_{\mathrm{B}}$ は，物体3が物体1に衝突した直後の物体1と物体2の運動エネルギーの総和 $\boxed{\text{ス}}$ と $E_1=\boxed{\text{セ}}$，$E_2=\boxed{\text{ソ}}$ の間に成り立つ関係を利用することでも求めることができる。

**問2**　時刻 $T_{\mathrm{B}}$ は動摩擦係数 $\mu_1$ に依存するものの，動摩擦係数 $\mu_2$ には依存しない。その理由を運動量の変化の観点から述べよ。

## Ⅱ

次の文章を読んで，$\boxed{\quad}$ に適した式を，それぞれ記せ。なお，$\boxed{\quad}$ はすでに $\boxed{\quad}$ で与えられたものと同じ式を表す。また，**問1**～**問4** については，指示にしたがって，解答をそれぞれ記せ。

同じ極板面積と極板間距離をもつ平行板コンデンサーAとBがあり，**図1** のように，電圧 $V_0$ の直流電源，抵抗値 $r$ の抵抗，および2つのスイッチ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ からなる電気回路を構成している。両コンデンサーの極板は正方形で十分に広いとする。最初，コンデンサーAの極板間は，比誘電率 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(>1)$ で形状が直方体の誘電体（絶縁体）ですきまなく満たされており，コンデンサーBには何も挿入されていない。このとき，コンデンサーBの容量を $C_0$ とすると，コンデンサーAの容量は $\varepsilon_{\mathrm{r}}C_0$ である。

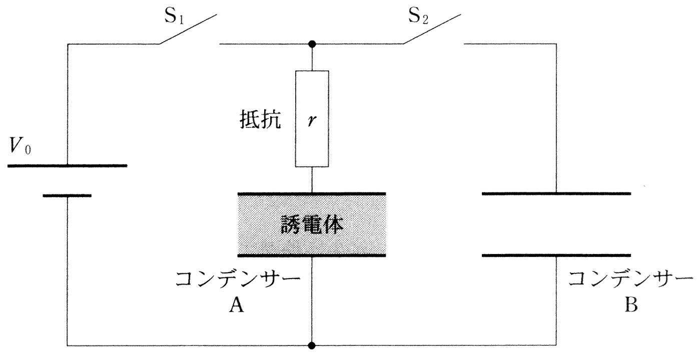



**図1**

両スイッチは **図1** のように開かれており，両コンデンサーに電荷は蓄えられていないとする。その状態から開始して，以下の操作(i)～(iv)の手順でコンデンサーBに蓄えられる電荷について考える。ただし，誘電体の移動に際して極板との摩擦は無視できるとする。

(i)　スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じ，十分に長い時間が経過してからこれを開く。
(ii)　コンデンサーAの誘電体を抜き取り，コンデンサーBに挿入し極板間を満たす。
(iii)　スイッチ $\mathrm{S_2}$ を十分に長い時間閉じておく。
(iv)　スイッチ $\mathrm{S_2}$ を開いてから，コンデンサーBの誘電体を抜き取り，コンデンサーAに挿入し極板間を満たす。

操作(ii)で誘電体を抜き取るのに要するエネルギーは $\boxed{\text{イ}}$ であり，その後のコンデンサーAの電圧は $\boxed{\text{ロ}}$ となる。操作(iii)の後，コンデンサーBの電圧は $\boxed{\text{ハ}}$ であり，コンデンサーBに蓄えられた電荷は $\boxed{\text{ニ}}$，両コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの和は $\boxed{\text{ホ}}$ である。操作(iv)の後，コンデンサーBの電圧は $\boxed{\text{ヘ}}$ となる。

**問1**　上記の操作(ii)と(iii)を逆の順序で行っても，(ii)の後に十分に長い時間が経過すれば，両コンデンサーの電圧と電荷量は元の手順での(iii)の後の値と等しくなる。逆の手順による電圧と電荷量の計算を行うことなく，その理由を簡潔に説明

せよ。

以下では元の手順で考える。操作(iii)でスイッチ $S_2$ を閉じると，抵抗に電流が流れ，両コンデンサー間で電荷が移動する。移動に要する時間を大まかに見積もろう。電流は時間とともに減少するが，これを平均的に一定電流 $I$ が時間 $T$ にわたって継続するとみなすと，電荷の移動量に着目して $\boxed{\text{ニ}}=IT$ とおくことができる。

**問 2**　電荷の移動により両コンデンサーが失う静電エネルギーと，時間 $T$ の間に抵抗で生じるジュール熱とが等しいとして $T$ を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

操作(i)〜(iv)を行った後，同じ手順を何度も繰り返すと，コンデンサーBの電荷量はやがてある一定値 $Q_0$ に落ち着く。このとき，操作(i)〜(iv)で電荷が移動しなくなる。

**問 3**　$Q_0$ の値を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

次に，コンデンサーBに誘電体が完全に挿入された状態で極板間電圧が $V$ になるように充電されているとする。**図 2** のように，コンデンサーBに抵抗値 $R$ の抵抗を接続し，誘電体の挿入量を調整することにより，抵抗の電圧を短時間一定に保つ方法を考える。極板間で，誘電体が存在する部分と存在しない部分の体積比を $(1-x):x$ とすると，コンデンサーBの容量は $\boxed{\text{ト}}$ となる。電圧が $V$ のとき，抵抗に流れる電流により，微小時間 $\Delta t$ の間に，コンデンサーBの電荷は $\boxed{\text{チ}}$ だけ減少する。一方，体積比を $(1-x-\Delta x):(x+\Delta x)$ に変更すると，それによる容量の減少量 $\Delta C$ は $\boxed{\text{リ}}$ となる。

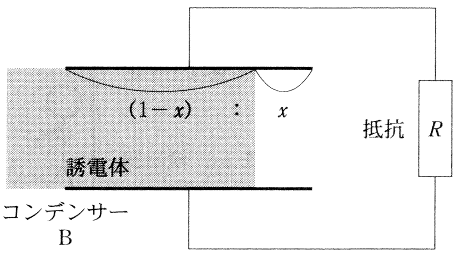



**図 2**

**問 4**　電圧を $V$ に保つように体積比を変化させるとき，変化率 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ を求めよ。また，電圧を一定値 $V$ に保つことができる時間を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

## Ⅲ

次の文章を読んで，$\boxed{\phantom{xx}}$ には適した式を，$\boxed{\phantom{xx}}$ には適切な語句をそれぞれ記せ。なお，$\boxed{\phantom{xx}}$ はすでに $\boxed{\phantom{xx}}$ で与えられたものと同じ式を表す。また，**問 1** 〜**問 3** については，指示にしたがって，解答をそれぞれ記せ。1に近い量は，微小量 $\varepsilon$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_k$ に対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{1-\varepsilon}=1+\varepsilon \quad \text{および} \quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_k)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k$$

を用いて，1＋(微小量) の形に表せ。以下では「重力」という言葉は「万有引力」と同じ意味である。また，地球の自転は無視する。

地球の密度は球対称であるとする。検出器Bは箱に固定されている。

(1)　**図1**のように，宇宙空間で図の上方に向かって，一定の加速度 $a$ で引っ張られている箱を考える。箱に固定された点Aにある振動数 $f_A$ の光源から，上方に距離 $h$ だけ離れた点Bにある検出器に向けて光の信号を送る。ここでは，上下方向の運動のみを考え，ベクトルである量は上を正の向きとする。

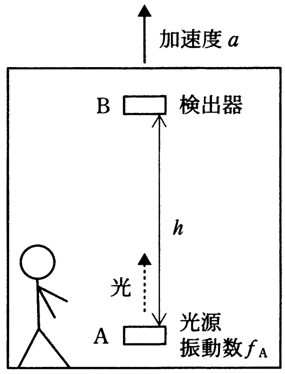



図1

光が光源を出たときの箱の速度を $v_A$，検出器に到達したときの箱の速度を $v_B$ とすると，検出器が受け取る光の振動数 $f_B$ と $f_A$ の比は，ドップラー効果の公式より，

$$\frac{f_B}{f_A}=1+\frac{\boxed{\text{あ}}}{c}$$

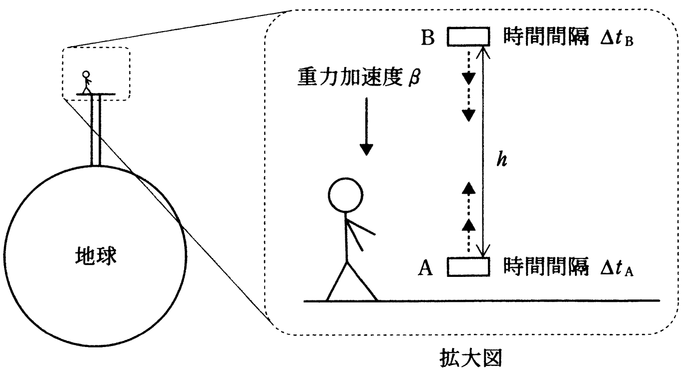
となる。($v_A$，$v_B$ を用いて表せ。) ここで，$v_A$，$v_B$ の大きさは光速（光の速さ）$c$ に比べて十分小さいとし，$\frac{v_A}{c}$，$\frac{v_B}{c}$ を微小量として上記の近似値を用いた。(ここでは，物体の速さは光速に比べて非常に小さいため，時間の遅れや物差しの縮みといった，いわゆる特殊相対論的な効果は無視してよい。)

光が光源を出てから検出器に到達するまでの時間を $t$ とすると，$v_B-v_A$ は $a$ と $t$ を用いて $\boxed{\text{い}}$ と書ける。もし，箱の速度が常にゼロであれば，$t$ は $c$ と $h$ を用いて $\boxed{\text{う}}$ と書ける。箱が加速を受けている場合も，光が伝わる間，箱の速度が常に光速に比べて十分小さいとき，すなわち，$\left|\frac{ah}{c}\right| \ll c$ がみたされている場合は，$t=\boxed{\text{う}}$ としてよい。以上のことから，$\frac{f_B}{f_A}=1-\frac{ah}{c^2}$ となることがわかる。光の振動数を考える代わりに，光源から短い時間間隔 $\Delta t_A$ をおいて出た２つのパルスが，検出器に到達するときにはどれだけの時間間隔 ($\Delta t_B$ とする。) になっているかを考えることもできる。振動数 $f$ の光を，単位時間に $f$ 個のパルスが出るという状況に置き換えてみると明らかなように，$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+(\boxed{\text{え}})$ と書けることがわかる。($h$，$a$，$c$ を用いて表せ。)

(2)　ところで，**図1**のような等加速度運動をしている箱の中にいる観測者から見ると，物体には通常の力の他に観測者の加速度運動からくる $\boxed{\text{お}}$ 力が働き，見かけの重力加速度 $\boxed{\text{か}}$ が生じる。(図の上向きを正として答えよ。) このようにして生じる見かけの重力と本物の重力が何ら変わりないというのが，アインシュタインの等価原理である。

たとえば，地球の中心からの距離が $r$ である点における地球による重力加速度は，地球の外では，向きは $\boxed{\text{き}}$ であり，大きさは $\boxed{\text{く}}$ である。($r$，地球の質量 $M$ および重力定数 $G$ を用いて表せ。) これは，場所によって向きも大きさも異なるが，任意の点のまわりで十分小さい領域を考えると，その中では重力加速度は一定とみなしてよい。その領域内での物理現象は，上のような等加速度運動をしている観測者が見るものと全く同じである。

そうすると，**図2**の点線内のように，重力加速度が下向きで大きさ $\beta$ が一定とみなせる領域内で，高さが $h$ だけ異なる２つの地点AとBの間で光をやり取りするとき，Aにおける時間間隔 $\Delta t_A$ とBにおける時間間隔 $\Delta t_B$ の間には $\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+(\boxed{\text{け}})$ の関係があることがわかる。($\beta$，$h$，$c$ を用いて表せ。)




拡大図

図2

**問１**　ここまではAからBへ光を送ることを考えたが，逆にBからAへ光を送る場合も $\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$ は上の近似の範囲で同じ値となる。その理由を簡潔に述べよ。

この結果は，重力がある場合は，場所によって時間の進み具合が違っていることを示している。すなわち，Aにおいて時間が$\Delta t_A$経過する間に，Bでは$\Delta t_B$だけ時間が経過するのである。これを，「Aにおける時間$\Delta t_A$とBにおける時間$\Delta t_B$が対応している」ということにしよう。今の場合は，$\Delta t_B > \Delta t_A$なので，時間の流れはBにおけるほうが，Aにおけるより速い。

(3)　上の結果を，２つの地点における重力ポテンシャルを使って表そう。質量$m$の粒子が他の物体から重力を受けているとき，その位置エネルギーは$m$に比例するので$m\phi$と表せる。$\phi$を粒子が置かれている点における重力ポテンシャルとよぶ。

**図２**の場合は，A，Bにおける重力ポテンシャルをそれぞれ$\phi_A$，$\phi_B$とすると，$\beta$，$h$を用いて，$\phi_B - \phi_A = \boxed{こ}$と書ける。結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$は$\phi_A$，$\phi_B$，$c$を用いて，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + (\boxed{さ})$と表される。実はこの式は，$\dfrac{|\phi_A - \phi_B|}{c^2}$が１に比べて十分小さければ，重力加速度が空間的に一定でなくても成り立つ。

それを見るための具体例として，**図３**のように地表上の点Aと，その$L$だけ上空の点Bを考える。地球の半径を$R$とし，線分ABを$N$等分する点を$A_1$，…，$A_{N-1}$とする。(便宜上，$A_0 = A$，$A_N = B$とする。)各点$A_i$における重力ポテンシャルを$\phi_i$とする。$N$が十分大きければ，各区間$A_iA_{i+1}$では重力加速度は一定としてよいから，$A_i$における時間$\Delta t_i$と$A_{i+1}$における時間$\Delta t_{i+1}$が対応しているとすると，$\dfrac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i} = 1 + \dfrac{\phi_{i+1} - \phi_i}{c^2}$をみたす。

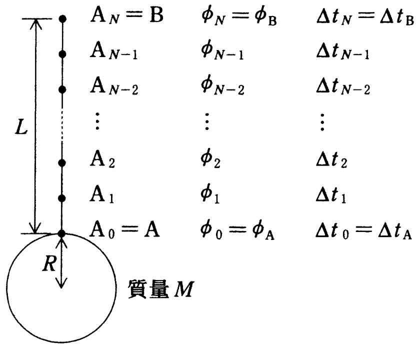


**図３**

**問２**　これらの$N$個の式の辺々をかけ合わせ，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + (\boxed{さ})$が成り立つことを示せ。

次に，$\boxed{さ}$を地表における重力加速度の大きさ$g$と$R$，$L$，$c$で表すことを考える。地球の外側にあり地球の中心から距離$r$だけ離れた点に，質量$m$の粒子を置いたときの重力の位置エネルギーは，無限遠を基準に取ると，$m$，$r$，$M$，$G$を用いて$\boxed{し}$で与えられる。よって，その点における重力ポテンシャルは，$-\dfrac{GM}{r}$である。一方，地表における重力加速度の大きさ$g$は$\dfrac{GM}{R^2}$と書けるから，$\phi_A$，$\phi_B$は$g$，$R$，$L$を用いて，$\phi_A = \boxed{す}$，$\phi_B = -g\dfrac{R^2}{R+L}$と表せる。これらを$\boxed{さ}$に代入すると，結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + (\boxed{せ})$であることがわかる。($g$，$R$，$L$，$c$を用いて表せ。)

(4)　この結果は，人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の違いを与えるために重要であり，GPS(全地球測位システム)等で実際に使われている。**図４**のように，地球の重力により，高度$L$の円軌道上を一定の速さ$v$で動いている人工衛星Cを考える。**図３**と同様に，A，Bは地表の点およびその$L$だけ上空の点である。今の場合，CはBに対してかなりの速さで動いているため，時計の遅れといわれる特殊相対論的な効果も考慮する必要がある。

特殊相対論によると，Bにおける時間$\Delta t_B$とCにおける時間$\Delta t_C$の間には，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B} = 1 - \dfrac{v^2}{2c^2}$という近似式が成り立つ。Bにおける重力加速度の大きさは$g\left(\dfrac{R}{R+L}\right)^2$と書けるから，$v^2$も$g$，$R$，$L$を用いて表せることに注意すると，これは，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B} = 1 + (\boxed{そ})$と書ける。($g$，$R$，$L$，$c$を用いて表せ。)

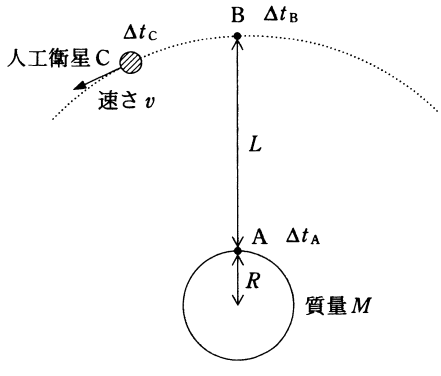


**図４**

**問 3**　人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の比は $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ である。以上のことから，$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ を $g$，$R$，$L$，$c$ を用いて表せ。また，$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$R=6.0\times10^6\,\mathrm{m}$，$L=3.0\times10^7\,\mathrm{m}$，$c=3.0\times10^8\,\mathrm{m/s}$ としたときの $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$，$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$，$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ を 1＋(微小な数値) の形で求めよ。