Ⅰ　aを正の定数とし，xy平面上の曲線Cの方程式を$y=x^3-a^2x$とする。

(1)　C上の点$\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$におけるCの接線をℓとする。ℓとCで囲まれた図形の面積$S(t)$を求めよ。ただし，tは0でないとする。

(2)　bを実数とする。Cの接線のうちxy平面上の点$\mathrm{B}(2a,\ b)$を通るものの本数を求めよ。

(3)　Cの接線のうち点$\mathrm{B}(2a,\ b)$を通るものが2本のみの場合を考え，それらの接線をℓ_1，ℓ_2とする。ただし，ℓ_1とℓ_2はどちらも原点$(0,\ 0)$を通らないとする。ℓ_1とCで囲まれた図形の面積をS_1とし，ℓ_2とCで囲まれた図形の面積をS_2とする。$S_1 \geqq S_2$として，$\dfrac{S_1}{S_2}$の値を求めよ。

Ⅱ　$f_0(x)=xe^x$として，正の整数nに対して，

$$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}{}'(x)$$

により実数xの関数$f_n(x)$を定める。

(1)　$f_1(x)$を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$とするとき，定積分$\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$を求めよ。ただし，実数$a$，$b$，$c$は定数とする。

(3)　正の整数nに対して，$f_{2n}(x)$を求めよ。

Ⅲ　nを2以上の整数とする。1からnまでの整数が1つずつ書かれているn枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。このn枚のカードから，1枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を3回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値をX，最大値をYとする。次の問に答えよ。ただし，jとkは正の整数で，$j+k \leqq n$を満たすとする。また，sは$n-1$以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$かつ$Y \leqq j+k$となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$かつ$Y=j+k$となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$となる確率を$P(s)$とする。$P(s)$を求めよ。

(4)　nが偶数のとき，$P(s)$を最大にするsを求めよ。

Ⅳ　m，pを3以上の奇数とし，mはpで割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$の展開式におけるx^2の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$はpで割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$はp^2で割り切れないことを示せ。

(4)　rを正の整数とし，$s=3^{r-1}m$とする。2^s+1は3^rで割り切れることを示せ。

数学公式集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不　等　式)

1．$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，($a$，$b$，$c$ は正または 0)

2．$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(三　角　形)

3．$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

4．$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

5．$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

(図 形 と 式)

6．数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7．点(x_1, y_1)と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点(x_1, y_1, z_1)と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8．だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9．双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点(x_1, y_1)における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

(ベクトルと行列)

10．2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

11．$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \neq 0)$

(複　素　数)

12．極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|$，$\theta=\arg z)$

13．$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

14．ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15．$x^2+px+q=0$ の解が α，β のとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

16．$x^3+px^2+qx+r=0$ の解が α，β，γ のとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

(対　　数)

17．$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

19．$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

20．$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

21．$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

22. $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

23. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$, $\left(\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(数　　列)

24. 初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和：$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$，$(l=a+(n-1)d)$

25. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq1)$

26. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(極　　限)

27. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

(微　積　分)

29. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

30. $x=f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\frac{1}{x}$

33. $x=g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

34. $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

35. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

36. $\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

37. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2\quad(a>0)$，$\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}\quad(a\neq0)$，$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$，$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

(順列・組合せ)

40. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1\leqq r\leqq n-1)$

41. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

(確　　率)

42. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q=1-p)$

43. 期待値：$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ をみたすとする。