



未名天留学

学语言・办留学・一站解决

# 数学

問題

2015年度入試

【学部（学科）】

理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、基礎工学部

【入試名】

前期日程

【試験日】

2月25日

## 【問題解答前の確認事項】

[注意] 理（数学〈挑戦枠〉）は2月26日実施の試験も解答すること。

過去問ライブラリーは(株)旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」に掲載している問題、解答・解説を転載しています。

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は(株)旺文社またはその情報提供者に帰属します。

また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

本書に掲載している著作物のうち、★印を付したものは著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

© Obunsha Co.,Ltd

◆裁定申請日 【2012年】 5/1,/5/18, 【2013年】 7/8, 【2014年】 3/17,8/12



电话: 400-6321-400/13601043104(微信) QQ: 1925811302

地址: 北京市海淀区海淀路北大资源东楼 1433 室

1 自然数  $n$  に対して関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(配点率 20%)

(1)  $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$  を示せ。

(2) 数列  $\{I_n\}$  を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。  $0 \leq x \leq 1$  のとき  $\log(1+x) \leq \log 2$  であることを用いて数列  $\{I_n\}$  が収束することを示し、その極限値を求めよ。ただし、  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であることを用いてよい。

2 実数  $x, y$  が  $|x| \leq 1$  と  $|y| \leq 1$  を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

(配点率 20%)

3 以下の問いに答えよ。

(配点率 20%)

(1)  $\sqrt{2}$  と  $\sqrt[3]{3}$  が無理数であることを示せ。

(2)  $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$  がすべて有理数であるとする。そのとき、  $p = q = 0$  であることを示せ。

4 座標空間の  $x$  軸上に動点  $P, Q$  がある。  $P, Q$  は時刻 0 において、原点を出発する。  $P$  は  $x$  軸の正の方向に、  $Q$  は  $x$  軸の負の方向に、ともに速さ 1 で動く。その後、ともに時刻 1 で停止する。点  $P, Q$  を中心とする半径 1 の球をそれぞれ  $A, B$  とし、空間で  $x \geq -1$  の部分を  $C$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(配点率 20%)

(1) 時刻  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) における立体  $(A \cup B) \cap C$  の体積  $V(t)$  を求めよ。

(2)  $V(t)$  の最大値を求めよ。

5  $n$  を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ  $n \times n$  のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行、第 2 行、 $\dots$ 、左から第 1 列、第 2 列、 $\dots$ 、と数える。数字の入れ方についての次の条件  $p$  を考える。

条件  $p$ : 1 から  $n-1$  までのどの整数  $i, j$  についても、第  $i$  行、第  $i+1$  行と第  $j$  列、第  $j+1$  列とが作る  $2 \times 2$  の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。

(配点率 20%)

(1) 条件  $p$  を満たすとき、第  $n$  行と第  $n$  列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。

(2) 条件  $p$  を満たすような数字の入れ方の総数  $a_n$  を求めよ。

