数学

解答

2015年度入試

【学部（学科）】
理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、基礎工学部

【入試名】
前期日程

【試験日】
2月25日

【問題解答前の確認事項】
〔注意〕　理（数学〈挑戦枠〉）は 2 月 26 日実施の試験も解答すること.

1505900201

◆裁定申請日 【2012年】5/1,/5/18,【2013年】7/8,【2014年】3/17,8/12

I Ⅲ（定積分と不等式，関数の極限）

解答 (1) $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

において，$\dfrac{x}{n}=t$ とおくと，

$$dx=n\,dt,\quad \begin{array}{c|c} x & 0\to n \\ \hline t & 0\to 1 \end{array}$$

により

$$\int_0^n f_n(x)\,dx=\int_0^1 \frac{nt}{n(1+nt)}\log(1+t)\cdot n\,dt$$

$$=\int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt$$

$$=\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt$$

$$=\int_0^1 \log(1+t)\,dt$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$1+nt>0$，$\log(1+t)\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$ から

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt\geqq 0$$

よって，① により

$$\int_0^n f_n(x)\,dx\leqq\int_0^1 \log(1+t)\,dt \quad \cdots\cdots②$$

したがって

$$\int_0^n f_n(x)\,dx\leqq\int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

(2) $\log(1+t)\leqq\log 2$ $(0\leqq t\leqq 1)$

から

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt\leqq\log 2\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\,dt$$

$$=\log 2\left[\frac{1}{n}\log(1+nt)\right]_0^1$$

$$=\log 2\cdot\frac{\log(1+n)}{n}$$

よって，① により

$$\int_0^n f_n(x)\,dx\geqq\int_0^1 \log(1+t)\,dt-\log 2\cdot\frac{\log(1+n)}{n} \quad \cdots\cdots③$$

ここで

$$\int_0^1 \log(1+t)\,dt=\Big[(1+t)\log(1+t)-t\Big]_0^1$$

$$=2\log 2-1$$

であるから，②，③ により

$$2\log 2-1-\log 2\cdot\frac{\log(1+n)}{n}\leqq\int_0^n f_n(x)\,dx$$

$$\leqq 2\log 2-1 \quad \cdots\cdots④$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(1+n)}{1+n}\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)\right\}$$

$$=0$$

となることから，④ により，

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n(x)\,dx$$

$$=\mathbf{2\log 2-1} \quad （収束）$$

$$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha$$

$$+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2$$

$$=\sin^2(\alpha+\beta)$$

ここで，$0\leqq\sin^2(\alpha+\beta)\leqq 1$ が成り立つので

$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$$

《注》 相加平均・相乗平均の関係を用いて，

$$x^2+y^2-2x^2y^2$$

$$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)$$

$$\geqq 2\sqrt{x^2(1-y^2)\cdot y^2(1-x^2)}$$

$$=2|x|\,|y|\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\geqq -2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

$$1-(x^2+y^2-2x^2y^2)$$

$$=(1-x^2)(1-y^2)+x^2y^2$$

$$\geqq 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)\cdot x^2y^2}$$

$$=2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot|x|\,|y|$$

$$\geqq 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

とした諸君もいるかもしれない．相加平均・相乗平均の関係は，その証明を考えれば明らかなように，平方完成が本質である．そういう意味で「解答」と本質的に同じものである．

3 $\boxed{\text{A}}$（約数と倍数，素因数分解）

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．
$\sqrt{2}>0$ から，

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\quad (m,\ n\ \text{は互いに素な自然数})$$

と表され，

$$2n^2=m^2$$

左辺は 2 の倍数であるから，右辺も 2 の倍数で，このとき，

$$m=2m'\quad (m'\ \text{は自然数})$$

と表され，

$$2n^2=(2m')^2$$
$$n^2=2m'^2$$

右辺は 2 の倍数であるから，左辺も 2 の倍数で，このとき，n も 2 の倍数となる．
よって，m，n はいずれも 2 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．
したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である．
また，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定する．
$\sqrt[3]{3}>0$ から

$$\sqrt[3]{3}=\frac{k}{l}\quad (k,\ l\ \text{は互いに素な自然数})$$

と表され，

$$3l^3=k^3$$

左辺は 3 の倍数であるから，右辺も 3 の倍数で，このとき

$$k=3k'\quad (k'\ \text{は自然数})$$

と表され，

$$3l^3=(3k')^3$$
$$l^3=3^2k'^3$$

右辺は 3 の倍数であるから，左辺も 3 の倍数で，このとき，l も 3 の倍数となる．
よって，k，l はいずれも 3 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．
したがって，$\sqrt[3]{3}$ は無理数である．
(2) $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ ……①
とおく．p，q，r は有理数である．

$$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$$
$$3q^3=(r-\sqrt{2}p)^3$$

よって

$$\sqrt{2}p(3r^2+2p^2)=r(r^2+6p^2)-3q^3$$

$p\neq 0$ とすると $r^2\geqq 0$，$p^2>0$ から $3r^2+2p^2>0$ であるから

$$\sqrt{2}=\frac{r(r^2+6p^2)-3q^3}{p(3r^2+2p^2)}$$

右辺は有理数となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．ゆえに $p=0$ である．
このとき，① から

$$\sqrt[3]{3}q=r$$

$q\neq 0$ とすると，

$$\sqrt[3]{3}=\frac{r}{q}$$

右辺は有理数となり，$\sqrt[3]{3}$ が無理数であることに矛盾する．ゆえに $q=0$ である．
以上から

$$p=q=0$$

《注》 (1) については，$\sqrt{2}$ あるいは $\sqrt[3]{3}$ が有理数であるという仮定の下で，いろいろな矛盾の示し方がある．

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\quad (m,\ n\ \text{は互いに素な自然数})\quad \cdots\cdots(*)$$

から，$\dfrac{m^2}{n^2}\ (=2)$ は整数であり，m，n は互いに素だから，$n=1$．よって

$$\sqrt{2}=m\quad (\text{整数})$$

$1<2<4$ から $1<\sqrt{2}<2\ (=\sqrt{4})$ となり，1 と 2 の間に整数がなく矛盾．
あるいは，$(*)$ から

$$2n^2=m^2$$

両辺の素因数 2 の個数について，左辺は奇数個，右辺は偶数個，よって矛盾．
また，$\sqrt[3]{3}$ についても，それぞれ，同様に，矛盾を示すことが出来る．

$$= \pi\left\{-\frac{t^3}{3}+1+\frac{(-1+t)^3}{3}\right\}$$

$$+\pi\left(t+1-\frac{1^3}{3}-\frac{t^3}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\pi\left(-\frac{t^3}{3}-t^2+2t+\frac{4}{3}\right)}$$

(2) $V'(t)=\pi(-t^2-2t+2)$

$0\leqq t\leqq 1$ における $V(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$V(t)=\pi\left\{(-t^2-2t+2)\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)+2t+\frac{2}{3}\right\}$$

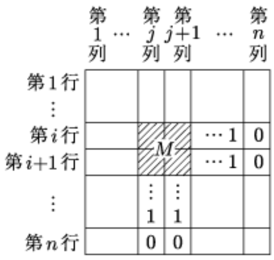
となることに注意して，$V(t)$ の最大値は

$$V(-1+\sqrt{3})=\pi\left\{2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}\right\}$$

$$= \boldsymbol{\pi\left(-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}\right)}$$

5 [A]（場合の数）《やや難》

[解答] (1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列のいずれも，0 あるいは 1 が連続して入るところがあると仮定して，矛盾を導く．



第 n 列の第 i 行，第 $(i+1)$ 行にともに 0（または 1）が入るとすると，第 $(n-1)$ 列の第 i 行，第 $(i+1)$ 行もともに 1（または 0）が入る．同様に第 $(n-2)$ 列，第 $(n-3)$ 列，$\cdots$ と考えていくと，いずれの列についても，第 i 行と第 $(i+1)$ 行は同じものが入る．このとき，第 i 行，第 $(i+1)$ 行と第 j 列，第 $(j+1)$ 列とが作る 4 つのマス M は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}\quad \text{または}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}\qquad\cdots\cdots(*)$$

となる．

同様に，第 n 行の第 j 列，第 $(j+1)$ 列にともに 0（または 1）が入るとすると，いずれの列についても，第 j 列と第 $(j+1)$ 列は同じ数字が入り，4 つのマス M は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}\quad \text{または}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}\qquad\cdots\cdots(**)$$

となる．

$(*)$，$(**)$ は互いに矛盾する．

したがって，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる．

(2) (i) 第 n 行に 0 と 1 が交互に現れる

(ii) 第 n 列に 0 と 1 が交互に現れる

(iii) (i) かつ (ii)

の 3 つの場合を考える．

任意の 2×2 の 4 個のマスのうち，3 個のマスに入る数字が定まれば，残り 1 個に入る数字は定まることに注意する（3 個が 0，0，1 なら残り 1 個は 1）．

(i) のとき，第 n 行の数字の入れ方は 2 通りある．さらに，第 $(n-1)$ 行について，第 n 列の数字の入れ方は 2 通りあり，これが定まると，第 $(n-1)$ 列，第 $(n-2)$ 列，$\cdots$ と次々に定まる．よって，第 $(n-1)$ 行の n 個の数字の入れ方は 2 通り．同様にして，第 $(n-2)$ 行，第 $(n-3)$ 行，$\cdots$ の n 個の数字の入れ方はそれぞれ 2 通り．

したがって，(i) のとき，数字の入れ方は全部で

2^n 通り．

(ii) のとき，(i) と同様に

2^n 通り．

(iii) のとき，第 n 行第 n 列のマスには，0 か 1 が入り，これが定まれば，まず第 n 行の n 個のマス，第 n 列の n 個のマスはすべて 1 通りに定まる．さらに，第 $(n-1)$ 列，第 $(n-2)$ 列，$\cdots$ は順に 1 通りに定まる．よって，(iii) のとき

2 通り．

(i)，(ii) をあわせると (iii) の場合が重複するので，

$$a_n=2^n+2^n-2$$

$$=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$$